Equazioni Lineari

Identità

Un'**identità** è un'uguaglianza fra due espressioni letterali vera per qualsiasi valore attribuito alle lettere.

ESEMPIO

$$\underbrace{a(b+c)}_{\text{primo membro}} = \underbrace{ab+ac}_{\text{secondo membro}}$$

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

ESEMPIO

L'uguaglianza $(2y - x)(2y + x) + x^2 = 4(y^2 + 1) - 4$ è un'identità?

- Primo membro: $(2y - x)(2y + x) + x^2 = 4y^2 - x^2 + x^2 = 4y^2$.
- Secondo membro: $4(y^2 + 1) - 4 = 4y^2 + 4 - 4 = 4y^2$.

I due membri sono uguali, quindi l'uguaglianza è un'identità.

Equazioni

Un'**equazione** è un'uguaglianza fra due espressioni letterali per la quale cerchiamo gli eventuali valori che, sostituiti a una o più lettere, dette **incognite**, la rendono vera.

ESEMPIO

- $2x + 1 = 0$ è un'equazione nell'incognita x.
- $6y^2 - 3x + 2 = 4x - 1$ è un'equazione nelle incognite x e y.
- $-1 + 5b = 2z + a^3$ è un'equazione nelle incognite a, b e z.
- $(3a - 1)(2x + 7)^2 = -14a$ è un'equazione nelle incognite x e a.

Risolvere un'equazione

Chiamiamo **soluzioni** o **radici** di un'equazione i valori che, attribuiti alle incognite, rendono uguali il primo e il secondo membro dell'equazione.

Risolvere un'equazione vuol dire trovarne tutte le soluzioni: le soluzioni vanno cercate nell'**insieme di definizione** o **dominio** dell'equazione.

ESEMPIO

L'equazione $5x + 1 = 2$ ha come unica soluzione $x = -1/5$ se il dominio dell'equazione è $\mathbb{R}$, invece non ha nessuna soluzione se il dominio è $\mathbb{N}$.

Per verificare se un numero è soluzione, basta sostituirlo all'incognita, e controllare se si ottiene un'identità.

Condizioni di esistenza

Di solito sottintendiamo che l'insieme numerico in cui consideriamo vera un'identità o in cui cerchiamo le soluzioni di un'equazione è $\mathbb{R}$.

Se esistono dei valori per cui le espressioni letterali non hanno significato dobbiamo scrivere le **condizioni di esistenza** (C.E.).

ESEMPIO

$\frac{(a+1)(a+3)}{a+1} = a+3$ è un'identità con C.E.: $a \neq -1$, perché il primo membro perde significato per $a = -1$.

ESEMPIO

L'equazione $(x - 2) = 1 + (x - 1)^{-1}$ richiede la C.E. $x \neq 1$, altrimenti il secondo membro perde di significato.

Classificazione delle equazioni in base al numero di soluzioni

Possiamo classificare le equazioni in base al numero di soluzioni.
Diremo che un'equazione è:

- **determinata** se ha un numero finito di soluzioni;
- **indeterminata** se le soluzioni sono infinite;
- **impossibile** se non ha soluzioni.

ESEMPIO

- $3x = 15$ ha una sola soluzione: $x = 5$, è **determinata**;
- $2x + 3x = 5x$ è vera per ogni valore della x (è un'identità), è **indeterminata**.
- $x + 2 = x$ non ha soluzioni, è **impossibile**.

Equazioni numeriche e letterali

In un'equazione possono essere presenti lettere diverse, ma non è detto che siano tutte **incognite**. Le incognite sono le lettere rispetto a cui l'equazione va risolta.

Diciamo che un'equazione è **numerica** se non contiene altre lettere oltre alle incognite, altrimenti è **letterale**.

Le lettere che non sono incognite sono dette **parametri** e possono assumere qualsiasi valore nell'insieme numerico considerato.

ESEMPIO

L'equazione $2 + y = a - 1$

- è **numerica** se a e y sono entrambe dichiarate come incognite,
- è **letterale** se a è dichiarata come parametro e di conseguenza y è l'incognita, o viceversa.

Equazioni equivalenti

Due equazioni nelle stesse incognite sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

ESEMPIO

- $y - 11 = 7y + 1$ e $4y = -8$ sono equivalenti.
- $2a + 3 = 0$ e $a^2 - 4a + 4 = 0$ non sono equivalenti perché la prima ha soluzione $a = -3/2$, mentre la seconda ha soluzione $a = 2$.
- $x + 1 = 0$ e $(x + 1)^2 (x + 1)^{-1} = 0$ non sono equivalenti perché la prima ha soluzione x = -1, mentre la seconda è impossibile visto che richiede la C.E. $x \neq -1$.

Princìpi di equivalenza

- Per risolvere un'equazione, cerchiamo di sostituirla con una equivalente più semplice.

ESEMPIO

$2x + 7 - 4(x + 3) = 7$ è equivalente a $-2x = 12$.

- Ripetiamo questo procedimento fino a ottenere un'equazione con soluzione immediata.

ESEMPIO

$x = 1$, $x = -6$ e $x = 0$ sono esempi di equazioni con soluzione immediata.

- Per passare da un'equazione a un'altra equivalente più semplice, utilizziamo due **princìpi di equivalenza**.

Primo principio di equivalenza

Aggiungendo o sottraendo a entrambi i membri di un'equazione uno stesso numero, o espressione letterale, otteniamo un'equazione equivalente.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $4x + 6 = 3 + x$.

Notiamo che ha soluzione $x = -1$.

- Se sommiamo ad entrambi i membri il numero -2 otteniamo un'equazione equivalente:
  $4x + 6 - 2 = 3 + x - 2$, ovvero $4x + 4 = 1 + x$.
- Se sommiamo ad entrambi i membri il monomio $-2x$ otteniamo un'equazione equivalente:
  $4x + 6 - 2x = 3 + x - 2x$, ovvero $2x + 6 = 3 - x$.

Regola del trasporto

Dal primo principio possiamo derivare la **regola del trasporto**:

Data un'equazione, ne otteniamo una equivalente se trasportiamo un termine da un membro all'altro cambiandogli segno.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $6y^2 - 5 - 2y = 1$, possiamo **trasportare** il termine $-2y$ dal primo al secondo membro ottenendo l'equazione equivalente: $6y^2 - 5 = 1 + 2y$.
Avremmo potuto ottenere la stessa equazione applicando il **primo principio di equivalenza** e sommando ad entrambi i membri il termine $+2y$.
$6y^2 - 5 - 2y + 2y = 1 + 2y$, $6y^2 - 5 = 1 + 2y$

Regola di cancellazione

Dal primo principio possiamo derivare la **regola di cancellazione**:

Data un'equazione, ne otteniamo una equivalente se in entrambi i membri cancelliamo termini uguali.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $3z - 5 = 2z - 5$, possiamo **cancellare** il termine -5 da entrambi i membri ottenendo l'equazione equivalente: $3z = 2z$.
Avremmo potuto ottenere la stessa equazione applicando il **primo principio di equivalenza** e sommando ad entrambi i membri il termine $+5$.
$3z - 5 + 5 = 2z - 5 + 5$, $3z = 2z$

Secondo principio di equivalenza

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero o espressione letterale diversi da zero, otteniamo un'equazione equivalente.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $9x - 3 = 3 + 3x$.

Notiamo che ha soluzione $x = 1$.

- Se moltiplichiamo entrambi i membri per il numero -1/3 otteniamo un'equazione equivalente:
  $-1/3(9x - 3) = -1/3(3 + 3x)$, ovvero $3x - 1 = -1 - x$.
- Se dividiamo entrambi i membri per il monomio $3x$ otteniamo un'equazione equivalente:
  $(9x - 3)/3x = (3 + 3x)/3x$, $3 - 1/x = 1/x + 1$, però dobbiamo ricordarci di imporre la C.E. $x \neq 0$.

Regola del cambio di segno

Dal secondo principio possiamo derivare la **regola del cambio di segno**:

Da un'equazione otteniamo un'equazione equivalente se cambiamo segno a tutti i suoi termini.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $-12x + 1 = -2$, possiamo **cambiare segno** a tutti i termini ottenendo l'equazione equivalente:
$12x - 1 = 2$.
Avremmo potuto ottenere la stessa equazione applicando il **secondo principio di equivalenza** e moltiplicando entrambi i membri per il numero -1.
$-1(-12x + 1) = -1(-2)$, $12x - 1 = 2$

Applicazioni del secondo principio di equivalenza

Oltre alla **regola del cambio di segno** ci sono altre applicazioni utili del secondo principio di equivalenza.

- Quando tutti i termini di un'equazione hanno un fattore comune.

ESEMPIO

$$8x + 16 = 24 \rightarrow \cancel{8}x + \cancel{8} \cdot 2 = \cancel{8} \cdot 3 \rightarrow x + 2 = 3$$ dividiamo per 8 tutti i termini

- Quando ci sono termini con coefficienti frazionari e vogliamo ottenere coefficienti interi.

ESEMPIO

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x}{9} + 2 \rightarrow \frac{9x+6}{18} = \frac{2x+36}{18} \rightarrow 9x + 6 = 2x + 36$$

stesso denominatore: mcm(2; 3; 9) = 18

moltiplichiamo per 18 entrambi i membri

Forma normale di un’equazione

Se i membri di un’equazione nell’incognita x sono polinomi possiamo riscrivere l’equazione come un solo polinomio $P(x)$ ridotto a forma normale e uguagliato a zero: $P(x) = 0$.

In questo modo si ottiene la **forma normale** dell’equazione.

ESEMPIO

Scriviamo il polinomio $y - 7 + 4y^2 = y^3 + 4 - 5y^2$ in forma normale.

- Trasportiamo al primo membro tutti i temini:
  $y - 7 + 4y^2 - y^3 - 4 + 5y^2 = 0.$
- Sommiamo i monomi simili:
  $y - 11 + 9y^2 - y^3 = 0$
- Ordiniamo il polinomio secondo le potenze decrescenti di y:
  $- y^3 + 9y^2 + y - 11 = 0$ $\quad (P(y) = - y^3 + 9y^2 + y - 11)$

Grado di un’equazione

Se i membri di un’equazione nell’incognita x sono polinomi, chiamiamo **grado** dell’equazione il grado del polinomio $P(x)$ ridotto a forma normale.

ESEMPIO

Il grado dell’equazione $-y^3 + 9y^2 + y - 11 = 0$ è 3, perché il polinomio $P(y) = -y^3 + 9y^2 + y - 11$ ha grado 3.

Risoluzione di un’equazione lineare

Per risolvere un’equazione numerica intera di primo grado, svolgiamo i calcoli nei due membri e utilizziamo i princìpi di equivalenza fino a giungere alla forma

$ax = b$.

Poi distinguiamo tre casi:

- equazione determinata, $a \neq 0$;
- equazione indeterminata, $a = 0$ e $b = 0$;
- equazione impossibile, $a = 0$ e $b \neq 0$.

Equazione determinata

Per risolvere un’equazione numerica intera di primo grado $ax = b$ determinata ($a \neq 0$) dividiamo ambedue i membri per a ottenendo la soluzione:

$x = b/a$

ESEMPIO

Consideriamo l’equazione $5x - 1 = x + 11$,

portimo i termini con la x al primo membro, i numeri al secondo

$4x = 12$,

notiamo che $a = 4$ quindi l’equazione è determinata

dividiamo entrambi i membri per 4

$x = 3$ è la soluzione.

Equazione indeterminata

Un'equazione numerica intera di primo grado $ax = b$ indeterminata ($a = 0$ e $b = 0$) ha per soluzione tutti i numeri reali, infatti $0x = 0$ è un'identità.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $7x - 6 + 2x = 9x - 10 + 4$,

portimo i termini con la x al primo membro, i numeri al secondo

$0x = 0$,

notiamo che $a = 0$ e $b = 0$ quindi l'equazione è indeterminata

qualsiasi numero reale sostituito ad x è la soluzione.

Equazione impossibile

Un'equazione numerica intera di primo grado $ax = b$ impossibile ($a = 0$ e $b \neq 0$) non ha soluzione; nessun numero reale x risolve l'equazione $0x = b$.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $4x - 6 + 5x = 9x + 4$,

portimo i termini con la x al primo membro, i numeri al secondo

$0x = 10$,

notiamo che $a = 0$ e $b \neq 0$ quindi l'equazione è impossibile

nessun numero reale x moltiplicato per 0 risulta 10.